

Równowaga w prostym modelu wymiany

Piotr Maćkowiak

Katedra Ekonomii Matematycznej
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

Między teorią a zastosowaniami – matematyka w działaniu
Będlewo 2015

Prosty model wymiany ([1, Definition 1.4.2] lub [5])

- n dóbr oraz m konsumentów, których preferencje są opisane ciągłymi, silnie wklęsłymi i monotonicznymi (rosnącymi) funkcjami użyteczności:

$$U^j : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, m$$

- każdy konsument j posiada początkowy zasób dóbr

$$a^j = (a_1^j, \dots, a_n^j) > 0,$$

- przy cenach towarów $p = (p_1, \dots, p_n) > 0$ konsument j dysponuje majątkiem wartym $pa^j := p_1 a_1^j + \dots + p_n a_n^j$ i pragnie nabyć koszyk dóbr o najwyższej użyteczności wśród koszyków, na które go stać:

$$\begin{aligned} & \max U^j(x) \\ & px \leq pa^j, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Koszyk najlepszy dla konsumenta j przy cenach p jest oznaczony jako $x^j(p)$.

Prosty model wymiany

Problem:

Czy istnieją ceny p , przy których konsumenci mogą zrealizować swoje preferencje?

Funkcja popytu nadwyżkowego generowany przez prosty model wymiany

- podaż globalna:

$$a := a^1 + \dots + a^m$$

- popyt globalny:

$$x(p) := x^1(p) + \dots + x^m(p)$$

- popyt nadwyżkowy:

$$z(p) := x(p) - a$$

Własności funkcji popytu nadwyżkowego generowanej przez prosty model wymiany [1, Theorem 1.4.4]

❶ $z : \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją ciągłą

❷ prawo Walrasa:

$$pz(p) = 0, \quad p > 0$$

❸ dodatnia jednorodność stopnia zero:

$$z(p) = z(kp), \quad k > 0, p > 0$$

❹ ograniczoność z dołu:

$$\exists M \in \mathbb{R} : \quad z_i(p) \geq M, \quad p > 0, i = 1, \dots, n$$

❺ warunek brzegowy:

$$\left(\lim_q p^q = p \text{ oraz } p_i = 0 \right) \Rightarrow \lim_q \|z(p^q)\| = +\infty$$

Równowaga

Wobec dodatniej jednorodności stopnia zero ograniczymy rozważany zbiór cen do otwartego sympleksu standardowego (cen)

$$S := \{p \in \mathbb{R}_{++}^n : p_1 + \dots + p_n = 1\}$$

i będziemy rozważać jedynie obcięcie funkcji z do S (zachowując dotychczasowe oznaczenie z).

Ceny równowagi:

Niech $z(p)$ funkcją popytu nadwyżkowego generowaną przez pewien prosty model wymiany. Wektor cen $p \in S$ jest nazywany wektorem cen równowagi, gdy $z(p) = 0$.

Równowaga

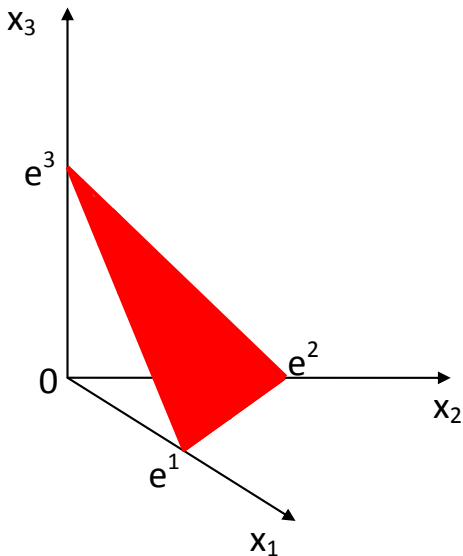
Wiadomo, że przy przyjętych założeniach ceny równowagi istnieją. Standardowo dowody istnienia korzystają z tw. Brouwera o punkcie stałym. W celu wykazania istnienia/ wyznaczenia (przybliżonych) cen równowagi można również skorzystać np. z algorytmu Scarfa [9] lub jednego z wielu innych [12].

Podamy jednak inną metodę wyznaczenia (przybliżonych) cen równowagi.

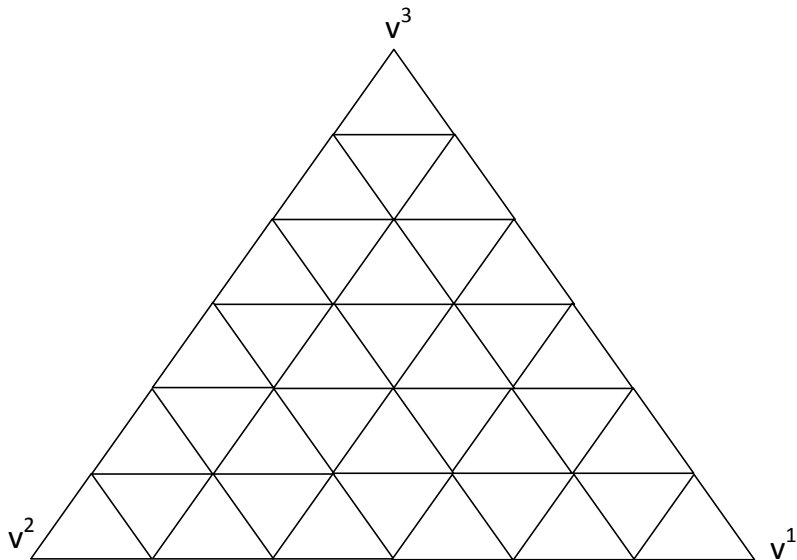
Dla prostoty tej części prezentacji zakładamy, że mamy do czynienia z rynkiem trzech dóbr oraz wzmacniamy warunek brzegowy do następującego:

$$\left(\lim_q p^q = p \text{ oraz } p_i = 0 \right) \Rightarrow \lim_q z_i(p^q) = +\infty$$

Standardowy sympleks dwuwymiarowy w $\mathbb{R}^3$



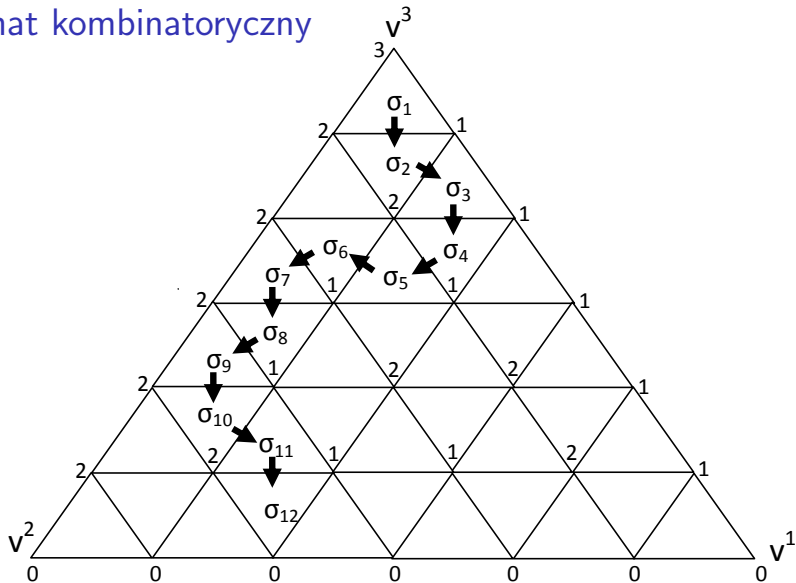
Triangulacja Kuhna (grubość $\frac{1}{6}$).



Lemat kombinatoryczny [7]

- Każdemu wierzchołkowi w z triangulacji sympleksu V o wierzchołkach v^1, v^2, v^3 przypiszmy jedną z liczb 0, 1, 2, 3 według następujących reguł:
 - 1 3 jest przypisana jedynie do v^3
 - 2 0 jest przypisane każdemu wierzchołkowi leżącemu na ścianie sympleksu V przeciwległej do wierzchołka v^3 (krawędź v^1, v^2)
 - 3 pozostałym wierzchołkom triangulacji przypiszmy liczbę 1 lub 2 jakkolwiek, z zastrzeżeniem, że wierzchołkom leżącym na krawędzi v^1, v^3 nie jest przypisana 2, a wierzchołkom na krawędzi v^2, v^3 - nie jest przypisana 1.
- Istnieje dokładnie jeden ciąg sympleksów triangulacji o tej własności, że
 - 1 początkowy sympleks tego ciągu zawiera wierzchołek v^3
 - 2 końcowy sympleks ma punkt wspólny z podstawą v^1, v^2
 - 3 każde dwa kolejne sympleksy współdzielą ścianę (krawędź) o wierzchołkach z numerami 1, 2
 - 4 nie ma powtórzeń sympleksów
 - 5 suma mnogościowa sympleksów tego ciągu jest zbiorem spójnym.

Lemat kombinatoryczny



Lemat kombinatoryczny i ceny równowagi

- Określmy funkcję $\tilde{z} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ następująco:

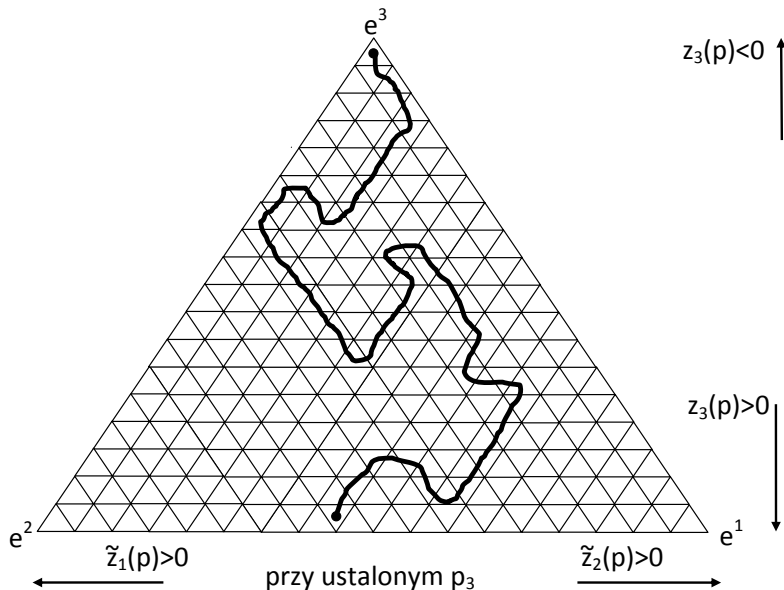
$$\tilde{z}(p) := \left(\underbrace{(1 - p_3)z_1(p) + p_3z_3(p)}_{\tilde{z}_1(p)}, \underbrace{(1 - p_3)z_2(p) + p_3z_3(p)}_{\tilde{z}_2(p)} \right).$$

- Dla odpowiednio drobnej triangulacji Kuhna sympleksu standardowego:
 - wierzchołkowi e^3 przypisz 3
 - wierzchołkom z podstawy e^1, e^2 przypisz 0
 - dla pozostałych wierzchołków triangulacji:

$$v \mapsto \min\{i \in \{1, 2\} : \tilde{z}_i(v) \leq 0\}.$$

Uwaga! Dla prostoty prezentacji pewne szczegóły pominięto/zaniedbano, jednak istota pozostaje niezmienną.

Lemat kombinatoryczny i ceny równowagi



Lemat kombinatoryczny i ceny równowagi - obserwacje

- 1 wartości funkcji $\tilde{z}$ różnią się niewiele na 'małych trójkątach' (sympleksach); podobnie jest dla funkcji z
- 2 w każdym sympleksie σ ze wskazanego ciągu jest taka para jego wierzchołków w, w' , że $w \mapsto 1, w' \mapsto 2$, czyli

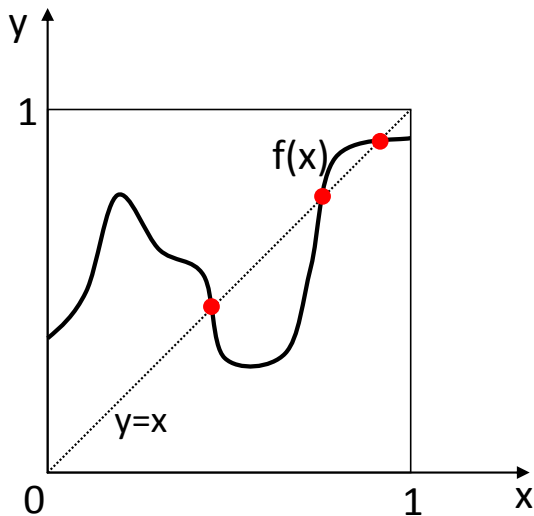
$$\tilde{z}_1(w) \leq 0 \text{ oraz } \tilde{z}_2(w') \leq 0$$

- 3 we wskazanym ciągu sympleksów istnieje taki sympleks $\bar{\sigma}$, że

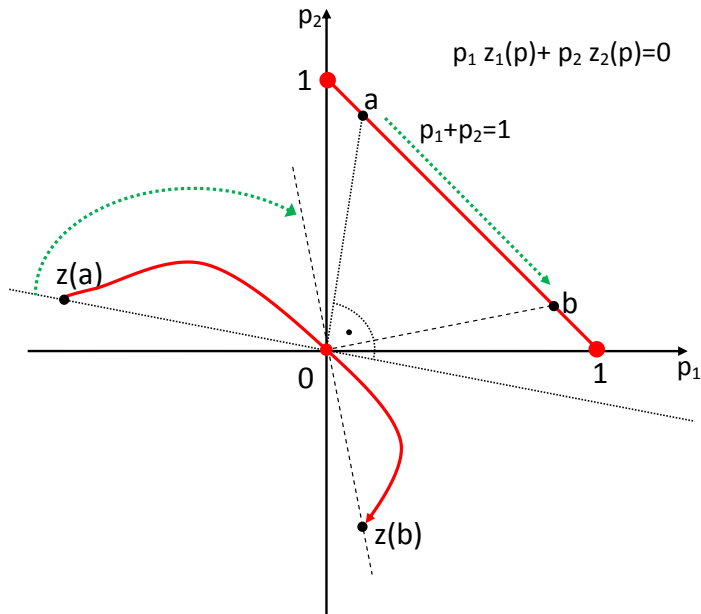
$$z_3(p) = 0 \text{ dla pewnego } p \in \bar{\sigma}$$

- 4 dla tego punktu $p \in \bar{\sigma}$ wartość $z(p)$ jest 'o ε różna od 0':
wektor p jest wektorem aproksymującym ceny równowagi

Punkt stały



Równowaga



Równoważność tw. Brouwera i tw. o istnieniu równowagi

Twierdzenie Brouwera [2]

Założmy, że $f : \bar{S} \rightarrow \bar{S}$ jest funkcją ciągłą. Istnieje wtedy punkt stały funkcji f : $x = f(x)$ dla pewnego $x \in \bar{S}$.

Twierdzenie Walrasa (wg [11]) [3, Principal Lemma]

Niech $z : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie funkcją ciągłą, spełniającą prawo Walrasa. Wtedy istnieje punkt równowagi funkcji z : $z(p) \leq 0$ dla pewnego $p \in \bar{S}$.

Twierdzenie Uzawy [11]

Twierdzenie Brouwera i twierdzenie Walrasa są równoważne.

Uwaga! W powyższych twierdzeniach dziedzinami funkcji jest domknięty sympleks cen, podczas gdy w prostym modelu wymiany funkcja popytu nadwyżkowego jest określona na otwartym sympleksie cen.

Tw. Brouwera i istnienie równowagi ekonomicznej

Funkcję $z : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazywamy funkcją popytu nadwyżkowego, gdy

- ❶ jest ciągła
- ❷ spełnia prawo Walrasa:

$$pz(p) = 0, \quad p \in S$$

- ❸ jest ograniczona z dołu:

$$\exists M \in \mathbb{R} : \quad z_i(p) \geq M, \quad p \in S, i = 1, \dots, n$$

- ❹ spełnia warunek brzegowy:

$$\left(\lim_q p^q = p \text{ oraz } p_i = 0 \right) \Rightarrow \lim_q \|z(p^q)\| = +\infty$$

Tw. Brouwera i istnienie równowagi ekonomicznej

Można wykazać, że przytoczone wcześniej

Twierdzenie Walrasa (wg [11]) [3, Principal Lemma]

Niech $z : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie funkcją ciągłą, spełniającą prawo Walrasa. Wtedy istnieje punkt równowagi funkcji z : $z(p) \leq 0$ dla pewnego $p \in \bar{S}$.

jest równoważne następującemu (zob. np. [6, 10]):

Twierdzenie o istnieniu równowagi dla funkcji popytu nadwyżkowego

Niech $z : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie funkcją popytu nadwyżkowego. Istnieją wtedy ceny równowagi:

$$z(p) = 0 \text{ dla pewnego } p \in S.$$

Tw. Brouwera i istnienie równowagi ekonomicznej

Twierdzenie Mas-Colella [8]

Dla każdej funkcji popytu nadwyżkowego z istnieje taki prosty model wymiany M (tj. układ funkcji użyteczności o odp. własnościach i układ wyposażenia początkowego), że zbiór cen równowagi funkcji z (tj. $\{p \in S : z(p) = 0\}$) jest równy zbiorowi cen równowagi funkcji popytu nadwyżkowego generowanej przez model M .

Z powyższego twierdzenia wynika

Twierdzenie

Tw. Brouwera jest równoważne twierdzeniu o istnieniu cen równowagi w prostym modelu wymiany.

Zastosowanie naiwne

Pytanie:

Czy wzrost zasobów jakiejś grupy społeczeństwa (bez rozwiązań 'siłowych', tj. pozostała część społeczeństwa posiada niezmienione zasoby dóbr) prowadzi do wzrostu satysfakcji całego społeczeństwa?

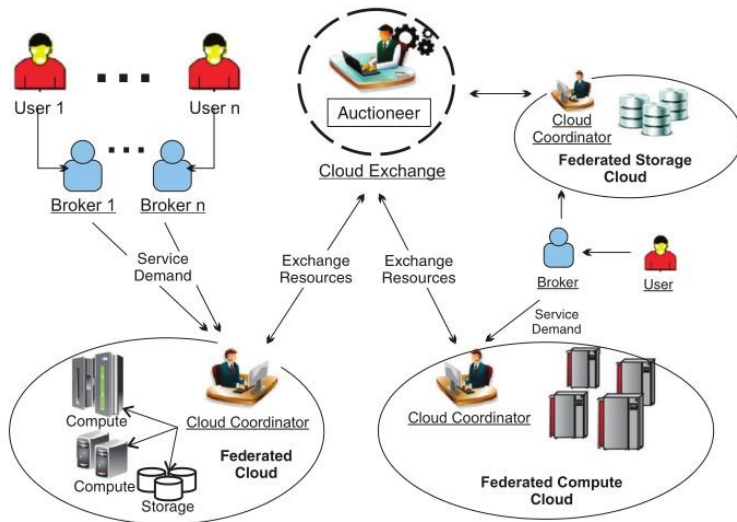
Zastosowanie naiwne

Ceny równowagi		Charakterystyki konsumentów		Zasoby konsumentów				Popyt				Użyteczność	
				Konsument I		Konsument II		Konsument I		Konsument II		Konsument	
dobro 1	dobro 2	alpha_1	beta_1	dobro 1	dobro 2	dobro 1	dobro 2	dobro 1	dobro 2	dobro 1	dobro 2	I	II
1.00	3.00	0.40	0.10	1.00	1.00	1.00	1.00	1.60	0.80	0.40	1.20	1.06	1.08
1.00	2.94	0.40	0.10	1.00	1.00	1.00	1.10	1.58	0.80	0.42	1.30	1.05	1.16
1.00	2.88	0.40	0.10	1.00	1.00	1.00	1.20	1.55	0.81	0.45	1.39	1.05	1.24
1.00	2.83	0.40	0.10	1.00	1.00	1.00	1.30	1.53	0.81	0.47	1.49	1.05	1.33
1.00	2.78	0.40	0.10	1.00	1.00	1.00	1.40	1.51	0.82	0.49	1.58	1.04	1.41
1.00	2.73	0.40	0.10	1.00	1.00	1.00	1.50	1.49	0.82	0.51	1.68	1.04	1.49
1.00	2.68	0.40	0.10	1.00	1.00	1.00	1.60	1.47	0.82	0.53	1.78	1.04	1.57
1.00	2.63	0.40	0.10	1.00	1.00	1.00	1.70	1.45	0.83	0.55	1.87	1.04	1.66
1.00	2.59	0.40	0.10	1.00	1.00	1.00	1.80	1.43	0.83	0.57	1.97	1.03	1.74
1.00	2.54	0.40	0.10	1.00	1.00	1.00	1.90	1.42	0.84	0.58	2.06	1.03	1.82
1.00	2.50	0.40	0.10	1.00	1.00	1.00	2.00	1.40	0.84	0.60	2.16	1.03	1.90
1.00	2.46	0.40	0.10	1.00	1.00	1.00	2.10	1.38	0.84	0.62	2.26	1.03	1.98
1.00	2.42	0.40	0.10	1.00	1.00	1.00	2.20	1.37	0.85	0.63	2.35	1.03	2.06
1.00	2.38	0.40	0.10	1.00	1.00	1.00	2.30	1.35	0.85	0.65	2.45	1.02	2.14
1.00	2.34	0.40	0.10	1.00	1.00	1.00	2.40	1.34	0.86	0.66	2.54	1.02	2.22
1.00	2.31	0.40	0.10	1.00	1.00	1.00	2.50	1.32	0.86	0.68	2.64	1.02	2.30
1.00	2.27	0.40	0.10	1.00	1.00	1.00	2.60	1.31	0.86	0.69	2.74	1.02	2.38
1.00	2.24	0.40	0.10	1.00	1.00	1.00	2.70	1.30	0.87	0.70	2.83	1.02	2.46
1.00	2.21	0.40	0.10	1.00	1.00	1.00	2.80	1.28	0.87	0.72	2.93	1.02	2.54
1.00	2.17	0.40	0.10	1.00	1.00	1.00	2.90	1.27	0.88	0.73	3.02	1.02	2.62

Zastosowanie naiwne

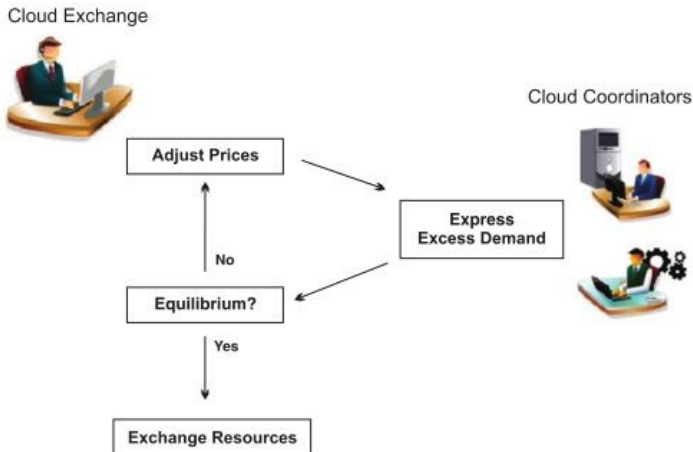
Ceny równowagi		Charakterystyki konsumentów		Zasoby konsumentów				Popyt				Użyteczność	
				Konsument I		Konsument II		Konsument I		Konsument II		Konsument	
dobro 1	dobro 2	alpha_1	beta_1	dobro 1	dobro 2	dobro 1	dobro 2	dobro 1	dobro 2	dobro 1	dobro 2	I	II
1.00	0.54	0.40	0.90	1.00	1.00	1.00	1.00	0.62	1.71	1.38	0.29	1.14	1.18
1.00	0.50	0.40	0.90	1.00	1.00	1.00	1.10	0.60	1.79	1.40	0.31	1.16	1.20
1.00	0.47	0.40	0.90	1.00	1.00	1.00	1.20	0.59	1.87	1.41	0.33	1.18	1.22
1.00	0.45	0.40	0.90	1.00	1.00	1.00	1.30	0.58	1.95	1.42	0.35	1.20	1.24
1.00	0.42	0.40	0.90	1.00	1.00	1.00	1.40	0.57	2.02	1.43	0.38	1.22	1.25
1.00	0.40	0.40	0.90	1.00	1.00	1.00	1.50	0.56	2.10	1.44	0.40	1.24	1.27
1.00	0.38	0.40	0.90	1.00	1.00	1.00	1.60	0.55	2.18	1.45	0.42	1.26	1.28
1.00	0.36	0.40	0.90	1.00	1.00	1.00	1.70	0.55	2.25	1.45	0.45	1.28	1.29
1.00	0.35	0.40	0.90	1.00	1.00	1.00	1.80	0.54	2.33	1.46	0.47	1.30	1.30
1.00	0.33	0.40	0.90	1.00	1.00	1.00	1.90	0.53	2.41	1.47	0.49	1.32	1.32
1.00	0.32	0.40	0.90	1.00	1.00	1.00	2.00	0.53	2.49	1.47	0.51	1.34	1.33
1.00	0.31	0.40	0.90	1.00	1.00	1.00	2.10	0.52	2.56	1.48	0.54	1.36	1.34
1.00	0.29	0.40	0.90	1.00	1.00	1.00	2.20	0.52	2.64	1.48	0.56	1.38	1.34
1.00	0.28	0.40	0.90	1.00	1.00	1.00	2.30	0.51	2.72	1.49	0.58	1.40	1.35
1.00	0.27	0.40	0.90	1.00	1.00	1.00	2.40	0.51	2.79	1.49	0.61	1.41	1.36
1.00	0.26	0.40	0.90	1.00	1.00	1.00	2.50	0.51	2.87	1.49	0.63	1.43	1.37
1.00	0.26	0.40	0.90	1.00	1.00	1.00	2.60	0.50	2.95	1.50	0.65	1.45	1.38
1.00	0.25	0.40	0.90	1.00	1.00	1.00	2.70	0.50	3.03	1.50	0.67	1.47	1.39
1.00	0.24	0.40	0.90	1.00	1.00	1.00	2.80	0.50	3.10	1.50	0.70	1.49	1.39
1.00	0.23	0.40	0.90	1.00	1.00	1.00	2.90	0.49	3.18	1.51	0.72	1.51	1.40

Rozdział wolnych mocy między chmurami [4]



Źródło: [4]

Rozdział wolnych mocy między chmurami [4]



Źródło: [4]

Literatura

- ❶ CH. ALIPRANTIS, D. BROWN, O. BURKINSHAW, *Existence and Optimality of Competitive Equilibria*, 1990
- ❷ L. BROUWER, *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, *Mathematische Annalen* **71** (1912), 97–115
- ❸ D. GALE, *The law of supply and demand*, *Mathematica Scandinavica* **3** (1955), 155–169
- ❹ E. GOMES, Q. BAO VO, R. KOWALCZYK, *Pure exchange markets for resource sharing in federated clouds*, *Concurrency and Computation: Practice and Experience* **24** (2012), 977–991
- ❺ W. KULPA, *Topologia a ekonomia*, Wydawnictwo Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego, 2010
- ❻ P. MAĆKOWIAK, *Some equivalents of Brouwer's fixed point theorem and the existence of economic equilibrium*. W: *Quantitative Methods in Economics 2012*, M. Małłoka (red.), Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, 164–171, 2012
- ❼ P. MAĆKOWIAK, *The existence of equilibrium in a simple exchange model*, *Fixed Point Theory and Applications* 2013:104 (2013), 1–11
- ❽ A. MAS-COLELL, *On The Equilibrium Price Set of an Exchange Economy*, *Journal of Mathematical Economics* **4** (1977), 117–126
- ❾ H. SCARF, *Computation of Equilibrium Prices: an Exposition*. W: K. Arrow, M. Intriligator (red.) *Handbook of Mathematical Economics*, vol. 2, 1006–1061, 1982
- ❿ M. TODA, *Approximation of Excess Demand on the Boundary and Equilibrium Price Set*, *Advances in Mathematical Economics* **9** (2006), 99–107
- ⓫ H. UZAWA, *Walras' Existence Theorem and Brouwer's Fixed-Point Theorem*, *The Economic Studies Quarterly* **13**(1) (1962), 59–62
- ⓫ Z. YANG, *Computing Equilibria and Fixed Points*, 1999